

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH BÌNH

CẤU TRÚC ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 9 THCS CẤP TỈNH NĂM HỌC 2023-2024 MÔN TOÁN

(Ban hành kèm theo Công văn số /SGDDT-QLCL, ngày /7/2023 của Sở GDĐT Ninh Bình)

1. Thời gian làm bài: 150 phút.

2. Điểm toàn bài: 20,0 điểm.

3. Hình thức: Tự luận.

4. Phạm vi kiến thức: Trong phạm vi Chương trình GDPT 2006 do Bộ GDĐT ban hành, tập trung chủ yếu ở lớp 9 THCS và công văn số 1313/SGDDT-GDTrH ngày 15/10/2021 của Sở GDĐT Ninh Bình về việc hướng dẫn nội dung, chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi cấp THCS từ năm học 2021-2022. Nội dung như sau:

CẤU TRÚC ĐỀ

Câu	Nội dung	Điểm
1	Biến đổi đại số: a) Rút gọn, tính giá trị biểu thức nhiều biến có điều kiện. b) Phương trình, hệ phương trình; bất phương trình.	4,0 điểm
2	Đa thức và bất đẳng thức: a) Đa thức. - Nghiệm của đa thức, định lý Viet, định lý Bơ-zu,... - Giá trị đa thức, hệ số của đa thức, bậc của đa thức... - Phép toán đa thức, phương trình hàm đa thức... - Đa thức có hệ số nguyên, đa thức nhận giá trị nguyên... b) Bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức. - Ứng dụng của bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz - Kỹ thuật chuẩn hóa, Dirichlet - Bất đẳng thức nhiều biến và quy nạp. - Ứng dụng vào giải phương trình và hệ phương trình.	4,0 điểm
3	Số học (02 ý nhỏ): - Quan hệ chia hết, số nguyên tố, đồng dư, UCLN BCNN - Số chính phương, số lập phương. - Phần nguyên, phương trình nghiệm nguyên.	3,0 điểm
4	Hình học phẳng: - Các phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp, hai tam giác bằng nhau, hai tam giác đồng dạng, ba điểm thẳng hàng. - Các định lý hình học cổ điển: Menelaus, Ceva, Ptolemy, định lý con bướm, đường thẳng Simson, Steiner, đường tròn Euler, đường thẳng Euler, định lý bốn điểm,...	6,0 điểm
5	Tổ hợp (02 ý nhỏ): - Bài toán đếm.	3,0 điểm

	<ul style="list-style-type: none"> - Nguyên lí Dirichlet, nguyên lí cực trị. - Đại lượng bất biến. - Phương pháp phản chứng, qui nạp, xây dựng cấu hình. - Trò chơi 	
--	---	--

Ghi chú:

- Trong một câu **không nhất thiết** phải ra hết các nội dung quy định.
- **Khuyến khích** các bài toán có liên hệ thực tế với tỷ lệ phù hợp và tăng dần sau năm học 2024-2025.

NỘI DUNG KIẾN THỨC CẦN CHÚ Ý

1. Đa thức và bất đẳng thức

a. Đa thức

- Các bài toán về nghiệm của đa thức (Định nghĩa nghiệm của đa thức; định lý Viet; định lý Bơ-zu...)
- Các bài toán về giá trị đa thức, hệ số của đa thức, bậc của đa thức....
- Các bài toán liên quan đến các phép toán đa thức, chứng minh tính chia hết của đa thức, tìm đa thức dư,...
- Các bài toán phương trình hàm đa thức (xác định đa thức) dựa vào nghiệm của đa thức, hệ số của đa thức, bậc của đa thức...
- Các bài toán về đa thức có hệ số nguyên, đa thức nhận giá trị nguyên,...

b. Bất đẳng thức

- Ứng dụng của bất đẳng thức AM-GM
- Ứng dụng của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz
- Kỹ thuật quan trọng: chuẩn hóa, Dirichlet.
- Bất đẳng thức nhiều biến và quy nạp.
- Ứng dụng vào giải phương trình và hệ phương trình.

2. Hình học

- Các phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp, hai tam giác bằng nhau, hai tam giác đồng dạng, ba điểm thẳng hàng.
- Một số định lý cổ điển trong hình học như Menelaus, Ceva, Ptolemy, định lý con bướm, đường thẳng Simson, Steiner, đường tròn Euler, đường thẳng Euler, định lý bốn điểm,...:
 - + Ứng dụng vào các bài toán chứng minh đồng quy, thẳng hàng.
 - + Ứng dụng vào các bài toán chứng minh vuông góc, song song.
- Hệ thức lượng trong đường tròn: Trang bị cho học sinh các kiến thức liên quan tới phương tích, trục đẳng phương và một số ứng dụng.

3. Số học

3.1 Quan hệ chia hết trên tập số nguyên

3.1.1 Ước, bội và quan hệ chia hết

- Xây dựng khái niệm, tính chất của quan hệ chia hết trên tập số nguyên.
- Phép chia có dư, biểu diễn số nguyên trên hệ cơ số b-phân.

Định lý 1.

- (i) $1 \mid a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.
- (ii) $a \mid a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.
- (iii) Nếu $a \mid b$, $b \mid c$ thì $a \mid c$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- (iv) Nếu $a \mid b$ thì $|a| \leq |b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.
- (v) Nếu $a \mid b_i$ với $a, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, n$ thì $a \mid \sum_{i=1}^n x_i b_i$ với $x_i \in \mathbb{Z}$.
- (vi) Nếu $a \mid b$ và $b \mid a$ thì $a = b$ hoặc $a = -b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $a, b \neq 0$.
- (vii) $a \mid b$ khi và chỉ khi $am \mid bm$, với $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.

Định lí 2 (Phép chia có dư). Với mỗi cặp số nguyên $a, b, b \neq 0$ tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q, r sao cho $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$.

Định lí 3 (Biểu diễn trong hệ cơ số b-phân). Cho số nguyên dương $b > 1$. Mỗi số nguyên dương a có thể biểu diễn duy nhất thành tổng sau

$$a = a_0 b^m + a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m,$$

trong đó m là một số nguyên không âm và $a_0, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, b-1\}, a_0 \geq 1$.

3.1.2 Ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất

- Xây dựng khái niệm, tính chất của ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số.
- Định lí Bézout, tính chất của hai số nguyên tố cùng nhau với bài toán chia hết.
- Mối quan hệ giữa ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất.

Định lí 3 (Định lí Bézout). Cho a và b là hai số nguyên không đồng thời bằng 0, và số nguyên dương d . Khi đó $d = \gcd(a, b)$ khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên x_0, y_0 sao cho $d = ax_0 + by_0$ và d là ước chung của a và b .

Hệ quả 1. Hai số nguyên a, b không đồng thời bằng 0 nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên x, y sao cho $ax + by = 1$.

Đặc biệt, hệ quả này còn có thể phát biểu: Nếu hai số nguyên a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên dương k và ℓ sao cho $ka - \ell b = 1$.

Định lí 4.

(i) Nếu $d > 0$ là ước chung của a, b thì $d = \gcd(a, b)$ khi và chỉ khi $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

(ii) Nếu c là ước chung của a và b thì $c \mid \gcd(a, b)$.

(iii) $(ma, mb) = m \cdot \gcd(a, b)$ với mọi m nguyên dương.

(iv) $\gcd\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{\gcd(a, b)}{c}$ với c là ước chung dương của a và b .

(v) Nếu $c \mid ab$ và $\gcd(b, c) = 1$ thì $c \mid a$.

(vi) Nếu $\gcd(a, c) = 1$ thì $\gcd(a, bc) = \gcd(a, b)$.

(vii) Nếu $\gcd(a, b) = \gcd(a, c) = 1$ thì $\gcd(a, bc) = 1$.

(viii) Nếu $a = bq + r$ thì $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$, với a, b nguyên không đồng thời bằng 0 (tính chất này còn phát biểu dưới dạng: Nếu $a \equiv r \pmod{b}$ thì $\gcd(a, b) = \gcd(r, b)$).

Định lí 5. Cho các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$, không đồng thời bằng 0. Khi đó

(i) Số nguyên $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ khi và chỉ khi d là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho tồn tại các số nguyên x_1, x_2, \dots, x_n để $d = \sum_{i=1}^n x_i a_i$.

(ii) $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên x_1, x_2, \dots, x_n để $\sum_{i=1}^n x_i a_i = 1$.

(iii) Số nguyên dương $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ khi và chỉ khi $d > 0, d$ là ước chung của các a_i và d chia hết cho mọi ước chung của các $a_i, i = 1, 2, \dots, n$.

(iv) $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \gcd(\gcd(a_1, a_2), a_3, \dots, a_n) = \gcd(\gcd(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

(v) $\gcd(ka_1, ka_2, \dots, ka_n) = k \cdot \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$, với k nguyên dương.

Định lí 5 (Thuật toán Euclide). Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Thực hiện liên tiếp các phép chia có dư ta có

$$\begin{aligned} a &= q_0 b + r_1, 0 < r_1 < b, \\ b &= q_1 r_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2, \\ &\dots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= q_n r_n, q_n > 1. \end{aligned}$$

Khi đó $\gcd(a, b) = r_n$.

Định lí 6. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0. Khi đó ta có

(i) $m = \text{lcm}(a, b)$ khi và chỉ khi m là bội chung dương của a, b và $m \mid c$, với mọi c là bội chung của a, b .

(ii) $m = \text{lcm}(a, b)$ khi và chỉ khi m là bội chung dương của a, b và $\gcd\left(\frac{m}{|a|}, \frac{m}{|b|}\right) = 1$.

(iii) $\text{lcm}(ka, kb) = k \cdot \text{lcm}(a, b)$ với k nguyên dương.

(iv) $\text{lcm}(a, b, c) = \text{lcm}(\text{lcm}(a, b), c)$.

Định lí 7. Cho hai số nguyên a, b khác 0. Khi đó $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = |ab|$.

3.1.3 Số nguyên tố, hợp số

- Xây dựng khái niệm, tính chất của số nguyên tố và định lí cơ bản của Số học.
- Các tính chất của hợp số, thuật toán kiểm tra số nguyên tố.
- Số ước dương của một số nguyên dương.
- Ứng dụng số nguyên tố trong các bài toán liên quan đến chia hết, ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất.

Định lí 8. Cho a, b là hai số nguyên và p là số nguyên tố. Nếu $p \mid ab$ thì hoặc $p \mid a$ hoặc $p \mid b$.

Định lí 9 (Định lí cơ bản của Số học). Mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 đều viết được dưới dạng tích của các số nguyên tố. Biểu diễn này là duy nhất nếu không kể đến thứ tự của các thừa số.

Hệ quả 2. Theo Định lí cơ bản của số học, mọi số nguyên dương $n > 1$ đều viết được duy nhất dưới dạng

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s},$$

ở đó p_i là các số nguyên tố phân biệt, a_i là các số nguyên dương với $i = 1, 2, \dots, s$. Biểu diễn trên được gọi là phân tích tiêu chuẩn của n .

Khi phân tích hai số nguyên dương m, n ở dạng phân tích tiêu chuẩn, có thừa số nguyên tố p là ước của m nhưng không là ước của n , ta có thể bổ sung vào phân tích của n thừa số p^0 (và ngược lại). Khi đó ta luôn viết được

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s} \text{ và } n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_s^{b_s},$$

trong đó p_i là các số nguyên tố phân biệt, a_i, b_i là các số tự nhiên với $i = 1, 2, \dots, s$. Khi đó

$$\gcd(m,n) = p_1^{\min(a_1,b_1)} p_2^{\min(a_2,b_2)} \dots p_s^{\min(a_s,b_s)},$$

$$\text{lcm}(m,n) = p_1^{\max(a_1,b_1)} p_2^{\max(a_2,b_2)} \dots p_s^{\max(a_s,b_s)}.$$

Định lí 10 (Euclide). Tồn tại vô hạn số nguyên tố.

3.2. Đồng dư

3.2.1 Đồng dư thức

- Xây dựng khái niệm và các tính chất của quan hệ đồng dư trên tập các số nguyên.
- Xây dựng khái niệm nghịch đảo modulo của một số nguyên, đồng dư tuyến tính.
- Ứng dụng đồng dư trong các bài toán chia hết đơn giản, tìm chữ số tận cùng, tìm số dư của phép chia, ...

Định lí 11.

- (i) Nếu $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \dots, n$ thì $\sum_{i=1}^n a_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i \pmod{m}$.
- (ii) Nếu $a \equiv b + c \pmod{m}$ thì $a - c \equiv b \pmod{m}$.
- (iii) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a + tm \equiv b \pmod{m}$ với mọi t nguyên.
- (iv) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $ac \equiv bc \pmod{m}$ và $ac \equiv bc \pmod{|c|m}$ với mọi c nguyên khác 0.
- (v) Nếu $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \dots, n$ thì $\prod_{i=1}^n a_i \equiv \prod_{i=1}^n b_i \pmod{m}$.
- (vi) Nếu $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \dots, n$ và $x \equiv y \pmod{m}$ thì $\sum_{i=1}^n a_i x^i \equiv \sum_{i=1}^n b_i y^i \pmod{m}$. Từ đó suy ra nếu $f(x)$ là một đa thức hệ số nguyên bậc dương và $x \equiv y \pmod{m}$ thì $f(x) \equiv f(y) \pmod{m}$.
- (vii) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$, d là ước chung của a và b , $\gcd(d, m) = 1$ thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.
- (viii) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và d là ước chung dương của a , b , m thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$.
- (ix) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $\gcd(a, m) = \gcd(b, m)$.
- (x) $ax \equiv ay \pmod{m} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\frac{m}{\gcd(a, m)}}$.
- (xi) $x \equiv y \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\text{lcm}(m_1, m_2, \dots, m_n)}$.

Định lí 12 (Một số dấu hiệu chia hết). Cho số nguyên dương $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}$. Khi đó

- (i) $n \equiv \overline{a_m + a_{m-1} + \dots + a_0} \pmod{3}$ và $n \equiv \overline{a_m + a_{m-1} + \dots + a_0} \pmod{9}$.
- (ii) $n \equiv \overline{a_1 a_0} \equiv 2a_1 + a_0 \pmod{4}$.
- (iii) $n \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0} \pmod{5^k}$. Đặc biệt $n \equiv a_0 \pmod{5}$.
- (iv) $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \pmod{11}$.

3.2.2 Định lí Fermat nhỏ, định lí Wilson

- Xây dựng các định lí Fermat nhỏ, Euler và Wilson.

- Tính chất của các số nguyên tố dạng $4k+1$ và $4k+3$, chú ý các tính chất
 - Với p nguyên tố, tồn tại số nguyên x sao cho $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod{4}$.
 - Với p nguyên tố, $p \equiv 3 \pmod{4}$ thì $p \mid a^2 + b^2$ khi và chỉ khi $p \mid a$ và $p \mid b$.
- Ứng dụng các định lý trên trong các bài toán chia hết, tìm chữ số tận cùng, phương trình nghiệm nguyên, ...

Định lý 13 (Fermat nhỏ). Cho số nguyên tố p . Nếu số nguyên a nguyên tố với p thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Hệ quả 2. Cho số nguyên tố p . Với mọi số nguyên a ta đều có $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Định lý 14 (Wilson). Cho số nguyên dương $p > 1$. Khi đó p là số nguyên tố khi và chỉ khi $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3.3. Số chính phương, số lập phương

- Xây dựng khái niệm và tính chất của số chính phương.
- Các kỹ thuật chứng minh một số là (không là) số chính phương.
- Các tính chất của số chính phương trong chia hết, chú ý tính chất: nếu $ab = x^2$ với $\gcd(a, b) = 1$ thì tồn tại u, v sao cho $a = u^2$ và $b = v^2$.
- Các tính chất của số chính phương liên quan đồng dư ($x^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, ...).
- Các tính chất của số chính phương với số nguyên tố dạng $4k+1$ và $4k+3$.
- Mở rộng các tính chất cho số lập phương, các số mũ cao hơn.

Định lý 15. Cho x là một số nguyên. Khi đó

- (i) $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$.
- (ii) $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$.
- (iii) $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$.
- (iv) $x^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{7}$.
- (v) $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$.
- (vi) $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ với mọi x lẻ.
- (vii) $x^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6, 9 \pmod{10}$.
- (viii) $x^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod{7}$.
- (ix) $x^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod{9}$.

Định lý 16. Nếu $n^2 < k < (n+1)^2$ với n là một số nguyên nào đó thì k không là số chính phương.

Định lý 17. Nếu hai số nguyên dương a và b nguyên tố cùng nhau thỏa mãn ab là một số chính phương thì a và b cũng là các số chính phương. Tổng quát hơn, nếu ab là số chính phương thì $a = du^2$ và $b = dv^2$, với $d = \gcd(a, b)$.

Định lý 18. Cho số nguyên tố lẻ p . Khi đó tồn tại số nguyên x sao cho $p \mid x^2 + 1$ khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Định lý 19. Cho số nguyên tố p sao cho $p \equiv 3 \pmod{4}$. Khi đó $p \mid a^2 + b^2$ khi và chỉ khi $p \mid a$ và $p \mid b$.

3.4. Phần nguyên.

- Xây dựng khái niệm và các tính chất cơ bản của phần nguyên, phần lẻ.
- Tính phần nguyên của một biểu thức; chứng minh các đẳng thức phần nguyên (phần lẻ); giải phương trình, bất phương trình phần nguyên (phần lẻ) đơn giản.
- Ứng dụng phần nguyên trong các bài toán Số học.

Định lý 20.

(i) $\lfloor x \rfloor = x$ khi và chỉ khi $x \in \mathbb{Z}$.

(ii) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

(iii) Nếu $k \in \mathbb{Z}$ thì $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

(iv) $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

(v) Số các số tự nhiên chia hết cho n không vượt quá x là $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

(vi) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ với n nguyên dương.

(vii) Nếu n là số nguyên dương thì $n \lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq n \lfloor x \rfloor + n - 1$.

(viii) Với mọi số nguyên n ta có $\lfloor x \rfloor + \lfloor n - x \rfloor = \begin{cases} n - 1 & \text{khi } x \notin \mathbb{Z} \\ n & \text{khi } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

(ix) Với n số nguyên dương x_1, x_2, \dots, x_n ta có $\sum_{i=1}^n x_i \geq \left\lfloor \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right\rfloor + n - 1$.

(x) $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

3.5. Phương trình nghiệm nguyên

Trang bị cho học sinh các kỹ năng, các phương pháp điển hình giải phương trình nghiệm nguyên

- Các phương pháp sử dụng tính chia hết: phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$; phương pháp phân tích nhân tử (phương trình ước); chia đa thức,...
- Phương pháp đồng dư: xét tính chẵn lẻ; xét số dư hai vế,...
- Phương pháp sử dụng bất đẳng thức, đánh giá.
- Phương pháp dùng tính chất của số chính phương: tính chia hết của các số chính phương; tổng các số chính phương; các số chính phương liên tiếp; sử dụng Δ với phương trình bậc hai; sử dụng tính chất $ab = x^2$ với $\gcd(a, b) = 1$ thì a, b chính phương;...
- Phương pháp xuống thang (lùi vô hạn).

4. Tổ hợp.

- Bài toán đếm.
- Nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực trị.
- Đại lượng bất biến.
- Phương pháp phản chứng, qui nạp, xây dựng cấu hình.
- Trò chơi.